Über
den Zusammenhang der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies mit ihrem Polartetraeder.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

VORGELEGT

VON

CARL NADLER
AUS BERLIN.

BERLIN 1909.
DRUCK VON OTTO WALTER, S. 14, KOMMANDANTENSTR. 44 A.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551502_0026

Über
den Zusammenhang der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies mit ihrem Polartetraeder.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

VORGELEGT

VON

CARL NADLER
AUS BERLIN.

BERLIN 1909.
DRUCK VON OTTO WALTER, S. 14, KOMMANDANTENSTR. 44 A.

Referent: Prof. Dr. Staude.

INHALT.

Seite

I. Das Viereck, welches von einer durch eine Kante des Polartetraeders gelegten Ebene aus der Raumkurve ausgeschnitten wird 1—5

II. Ausartung des Polartetraeders für den Fall, daß die Raumkurve Doppelpunkte besitzt . . . . . 5—11

III. Bestimmung und Konstruktion einer Raumkurve IV. O. 1. Sp., wenn zwei Kurvenpunkte und die Spitzen der vier Kegel gegeben sind, welche die Raumkurve enthalten . . . . . 12—17

IV. Wenn von einer Raumkurve IV. O. 1. Sp. drei Punkte gegeben sind und die Spitzen von drei die Kurve enthaltenden Kegeln, so ist der geometrische Ort für die Spitze des vierten die Kurve projizierenden Kegels eine Raumkurve dritter Ordnung . . . . . 17—22

V. Geometrische Konstruktion der im vorigen Kapitel auftretenden Raumkurve dritter Ordnung . . . . . 23—27

VI. Einige Eigenschaften der mit einem Doppelpunkte behafteten symmetrisch gestalteten Raumkurve IV. O. 1. Sp. . . . . 27—31

VII. Eine gewisse Schar von Rollkurven als Beispiel für die bisherigen Untersuchungen . . . . . 31—38

I.

Das Viereck, welches von einer durch eine Kante des Polartetraeders gelegten Ebene aus der Raumkurve ausgeschnitten wird.

Die Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies, welche wir abgekürzt mit Rc bezeichnen wollen, ist die Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung.*) Durch diese Schnittlinie lassen sich unendlich

*) Über solche Raumkurven vergleiche:

J. V. Poncelet, „Traité des propriétés projectives des figures", Paris 1822, p. 392 bis p. 404 (synthetisch),

Otto Hesse, „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes", 3. Aufl., Leipzig 1876, p. 120 bis p. 129 und p. 181 bis p. 185 (analytisch),

George Salmon (Fiedler), „Analytische Geometrie des Raumes", Leipzig, I. Teil 4. Aufl., 1898, p. 228 bis p. 230, II. Teil 3. Aufl., 1880, p. 133 bis p. 136 (analytisch),

Heinrich Schroeter, „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde", Leipzig 1880, p. 691 bis p. 700 (synthetisch),

Alfred Clebsch, „Vorlesungen über Geometrie", II. Bd. 1. Teil, Leipzig 1891, p. 207 bis p. 236 (analytisch),

Theodor Reye, „Die Geometrie der Lage", III. Abt. 3. Aufl., Leipzig 1892, p. 12 bis p. 39 (synthetisch),

Otto Staude in der „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften", Bd. III Heft 2, Leipzig 1904, Artikel 110 bis Artikel 127, wo besonders eine historische Übersicht der Literatur zu finden ist,

und die Spezialschriften:

J. Lüroth, „Über Polartetraeder und die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung", Ztschr. für Mathematik und Physik (Schlömilch), Bd. 13, 1867, p. 404 bis p. 413 (analytisch),

M. L. Painvin, „Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre", Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, tome septième, Paris 1868, p. 481 bis p. 501 (analytisch),

viele weitere Flächen zweiter Ordnung legen, unter denen sich im allgemeinen vier Kegel befinden. Die Scheitelpunkte dieser Kegel bilden die Ecken eines Polartetraeders, welches sämtlichen Flächen zweiter Ordnung gemeinsam ist, die durch die Rc gelegt sind.*)

Wilhelm Killing, „Der Flächenbüschel zweiter Ordnung", Diss., Berlin 1872 (analytisch),

A. Voss, „Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades", Mathematische Annalen, Bd. 10, 1876, p. 143 bis p. 188 (synthetisch),

Axel Harnack, „Über die Darstellung der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies und ihres Sekantensystems durch doppelt-periodische Funktionen", Math. Annalen, Bd. 12, 1877, p. 47 bis p. 86 (analytisch),

Gustav Westphal, „Über das simultane System zweier quaternärer Formen zweiten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumkurve vierter Ordnung $p = 1$. Math. Annalen, Bd. 13, 1877, p. 1 bis p. 19 (analytisch),

Heinrich Schroeter, „Über eine Raumkurve vierter Ordnung und erster Spezies", Journal für die reine und angewandte Mathematik (Kronecker), Bd. 93, 1881, p. 132 bis p. 176 (synthetisch),

Friedrich Schur, „Über eine besondere Klasse von Flächen vierter Ordnung", Math. Annalen, Bd 20, 1882, p. 254 bis p. 298 (synthetisch),

E. Lange, „Die sechzehn Wendeberührungspunkte der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies", Ztschr. f. Math. u. Phys. (Schlömilch), Bd. 28, 1883, p. 1 bis p. 23 und p. 65 bis p. 82 (analytisch),

A. Milinowski, „Zur Theorie der Raumkurven vierter Ordnung erster Art", Journal f. d. reine und angew. Math. (Kronecker), Bd. 97, 1884, p. 277 bis p. 316 (synthetisch),

V. Eberhard, „Die Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Spezies in ihrem Zusammenhang mit den Steinerschen Schließungsproblemen bei den ebenen Kurven dritter Ordnung", Ztschr. f. Math. u. Phys. (Schlömilch), Bd. 32, 1887, p. 65 bis p. 82 und p. 129 bis p. 144 (synthetisch),

Heinrich Schroeter, „Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies", Leipzig 1890 (synthetisch).

*) Dies wurde zuerst gezeigt von G. Lamé in „Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie", Paris 1818, p. 72 und zwar auf analytischem Wege, dann synthetisch bewiesen von

Poncelet, 1822, loco citato p. 395.

Außerdem cf.

Hesse, l. c. p. 182,

Salmon, l. c. I. Teil p. 235,

Clebsch, l. c. II. Bd. 1. Teil p. 207 und p. 209,

Reye, l. c. III. Abt. p. 20 und p. 35,

Killing, l. c. p. 8 und p. 9.

Zwei dieser Tetraederecken oder Kegelspitzen wollen wir mit O_1 bezw. O_2 bezeichnen. Legen wir durch O_1O_2 und einen Punkt P_1 der Rc, der mit keiner dieser beiden Kegelspitzen zusammenfällt, eine Ebene E, so sind für deren Verhalten gegenüber den Kegeln, welche von den Punkten O_1 und O_2 aus die Rc projizieren, drei Fälle möglich. Da die Ebene von jedem Kegel einen Punkt, nämlich P_1, enthält, so berührt sie entweder beide Kegel, oder sie berührt nur einen, während sie den andern in einem Geradenkreuz schneidet, oder aber sie schneidet aus beiden Kegeln Geradenkreuze. Im ersten Falle ist E eine gemeinsame Tangentenebene beider Kegel und enthält bei P_1 unendlich dicht nebeneinander vier Punkte der Rc. Im zweiten Falle berührt die Ebene die Rc nicht in zwei zusammenfallenden, sondern in zwei getrennt liegenden Punkten; E enthält zwei getrennt liegende Paare zusammenfallender Punkte der Rc. Im dritten Falle, welcher der allgemeine ist, treffen sich die beiden Geradenkreuze in vier getrennt liegenden Punkten der Rc. Es besteht mithin der Satz:

Eine Ebene, welche durch die Spitzen zweier die Rc enthaltenden Kegel gelegt wird, schneidet aus der Rc entweder vier Punkte aus oder keinen.

Nehmen wir an, eine durch O_1O_2 gelegte Ebene schneide aus der Rc das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ aus (cf. Fig. I) und den Punkt G aus der Geraden γ, welche der Geraden O_1O_2 bezüglich beider Kegel konjugiert ist, und die wir abgekürzt als die zu O_1O_2 konjugierte Gerade γ bezeichnen wollen. Ziehen wir GP_1, so trifft diese Gerade O_1O_2 in H, während sie den Kegel O_1 zum zweiten Male in Π_1, den andern Kegel in Π_2 schneidet. Da G und H einander in Bezug auf beide Kegel konjugiert sind, so müssen Π_1 und Π_2 im Punkte P_4 zusammenfallen. So ergibt sich, daß GP_1 durch P_4 und analog GP_2 durch P_3 geht.

In jedem vollständigen Viereck, das von einer durch die Spitzen zweier die Rc ausschneidenden Kegel O_1 und O_2 gelegten Ebene aus der Rc ausgeschnitten wird, projizieren zwei Paare gegenüberliegender Seiten die Spitzen der beiden Kegel O_1 und O_2, während das dritte Paar einen Punkt der zu O_1O_2 konjugierten Geraden γ ausschneidet.

Um die zu O_1O_2 konjugierte Gerade γ zu konstruieren, legen wir durch O_1O_2 zwei beliebige Ebenen, welche die Rc schneiden. In jeder Ebene bestimmen wir den Punkt G als einen Diagonalpunkt eines vollständigen Vierecks. Die Gerade γ geht dann durch die beiden Punkte G.

Von dem Polartetraeder, welches den beiden Kegeln O_1 und O_2 gemeinsam ist, existieren außer den beiden Ecken O_1 und O_2 mindestens die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen, welche sich in der zu O_1O_2 konjugierten Geraden γ schneiden. Wenn O_1O_2 und γ windschief zu einander liegen — wie es ja im allgemeinen stattfindet —, dann gibt es entweder keine weiteren Ecken des Polartetraeders, oder es gibt deren zwei weitere. Im letzteren Falle schneidet jede durch γ gelegte Ebene ein Dreieck aus dem Tetraeder aus, während sich ein solches im ersteren Falle für keine Ebene ergibt. Das ausgeschnittene Dreieck ist aber nichts anderes als das Polardreieck, welches den von der Ebene aus den beiden Kegeln geschnittenen Kurven gemeinsam ist. Da mit den beiden genannten Fällen die Zahl der Möglichkeiten erschöpft ist, so sind die gefundenen Sätze umkehrbar. Es gibt also nur dann zwei weitere Kegel, welche die Rc projizieren, wenn jede beliebige durch γ gelegte Ebene aus den Kegeln O_1 und O_2 zwei Kurven ausschneidet, denen ein vollständig reales Polardreieck gemeinsam ist.

Unsere Rc ist die Grundkurve eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung. Eine beliebige Ebene, die wir durch γ legen, schneidet die Gerade O_1O_2 in einem Punkte Ω und den Flächenbüschel in einem Büschel von Kegelschnitten. Dieser letztere hat entweder ein vollständig reales Polardreieck gemeinsam, oder es sind nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite real. Im ersten Falle hat der Kegelschnittbüschel vier Grundpunkte, wofern er überhaupt welche hat; im zweiten Falle gibt es nur zwei Grundpunkte, diese aber stets. Die Grundpunkte, von denen hier die Rede ist, sind nichts anderes als Punkte der Rc. Da auch die neugewonnenen Sätze die Umkehrung zulassen, sagen wir schließlich:

Wenn γ und O_1O_2 windschief zu einander liegen und eine beliebige durch γ gelegte Ebene die Rc in zwei Punkten schneidet, dann gibt es keine weiteren Kegel mehr, welche die Rc enthalten. Hingegen existieren noch

zwei solche Kegel, wenn die Ebene die Rc garnicht oder in vier Punkten trifft.

Die Konstruktion der Spitzen K_1 und K_2 der beiden weiteren Kegel ergibt sich in folgender Weise: Durch γ wird eine Ebene gelegt, welche die Rc in vier Punkten schneidet. Die Diagonalpunkte des ausgeschnittenen Vierecks sind die Ecken des Polardreiecks, das den beiden in der Ebene enthaltenen Kegelschnitten gemeinsam ist. Zwei dieser Ecken liegen auf γ und sind die Spitzen der beiden weiteren Kegel, welche die Rc projizieren.

Wenn in einer durch die beiden Kegelspitzen O_1 und O_2 gelegten Ebene ein Punkt A_1 der Rc gegeben ist, und wenn außerdem die zu O_1O_2 konjugierte Gerade γ vorhanden ist, dann lassen sich die übrigen in der Ebene gelegenen Punkte der Rc konstruieren. Wenn γ von der Ebene im Punkte G getroffen wird, so verbinden wir O_1 und O_2 mit A_1 und ziehen A_1G (cf. Fig. II). Diese Gerade schneidet O_1O_2 in H. Nun ist A_2 linear zu konstruieren, weil HG durch A_1 und A_2 harmonisch geteilt wird. A_2O_1 und A_1O_2 treffen sich in A_3, A_2O_2 und A_1O_1 im Punkte A_4. A_2, A_3 und A_4 sind die übrigen Punkte der Rc, welche in der Ebene enthalten sind.

Wenn der Punkt G ins Unendliche rückt, dann ziehen wir durch den gegebenen Punkt A_1 eine Gerade nach der Richtung hin, in welcher G gelegen ist. Dieselbe schneidet O_1O_2 in H. Die Strecke O_1O_2 wird durch H und J harmonisch geteilt. Durch J legen wir eine Parallele zu A_1H, welche von A_1O_2 im Punkte A_3 getroffen wird. Die Gerade A_3O_1 begegnet der Geraden HA_1 in A_2, die Gerade A_1O_1 der Geraden A_3J in A_4.

II.

Ausartung des Polartetraeders für den Fall, dafs die Raumkurve Doppelpunkte besitzt.

Einen Doppelpunkt der Rc wollen wir als einen Punkt von der Eigenschaft kennzeichnen, daß jede ihn enthaltende Ebene aus der Kurve auch einen unendlich dicht benachbarten Punkt ausschneidet.

Wir wollen nicht voraussetzen, daß die Rc auf Kegeln enthalten sei, sondern nur, daß sie bei A einen Doppelpunkt besitze.

Derselbe liege vorerst auf keiner der beiden Geraden, welche für alle die Rc enthaltenden Flächen zweiter Ordnung einander konjugiert sind, und die wir als die beiden konjugierten Geraden γ_1 und γ_2 bezeichnen wollen. Die Ebene E, die wir durch γ_1 und A legen, enthält von γ_2 den Punkt G_2. Die Gerade AG_2 begegnet der Geraden γ_1 im Punkte G_1. Die Strecke G_1G_2 wird von jeder Fläche zweiter Ordnung, die unsere Rc enthält, harmonisch geteilt, also von allen diesen Flächen im Punkte B getroffen, der nicht mit A zusammenfällt. Die Ebene E enthält aber, weil A ein Doppelpunkt ist, auch den unendlich dicht neben A liegenden Punkt A′ der Rc, und der von E aus dem Flächenbüschel, dessen Grundkurve die Rc ist, ausgeschnittene Büschel von Kegelschnitten hat vier Grundpunkte, zu denen A, A′ und B gehören. Bei einem solchen Kegelschnittbüschel sind von dem gemeinsamen Polardreieck alle drei Ecken vorhanden;*) von dem Polartetraeder des Büschels von Flächen zweiter Ordnung existieren daher mindestens zwei Ecken. Es besteht mithin der Satz: Wenn ein Doppelpunkt vorhanden ist, aber auf keiner der beiden konjugierten Geraden gelegen ist, dann ist die Rc auf mindestens zwei Kegeln enthalten.

Wenn der Doppelpunkt A auf einer der beiden konjugierten Geraden liegt, z. B. auf γ_1, so betrachten wir zwei Flächen zweiter Ordnung, welche die Rc projizieren. Die Ebene, welche die erste Fläche in A berührt, ist die Polarebene von A für die erste Fläche. Die Polarebene von A für die zweite Fläche ist die Ebene, welche die zweite Fläche in A berührt. Die Schnittgerade beider Tangentenebenen ist die zu γ_1 konjugierte Gerade γ_2. Es gehen nun entweder beide konjugierten Geraden durch den Doppelpunkt, oder alle Flächen des Büschels werden in A von derselben Ebene berührt. Legen wir durch γ_1 eine beliebige Ebene E, welche noch einen außerhalb der Geraden γ_1 gelegenen Punkt B der Rc enthält, so trifft diese Ebene die Rc in drei Punkten, nämlich in B und zwei bei A unendlich dicht beisammen liegenden Punkten. Der von E ausgeschnittene Kegelschnittbüschel hat vier Grundpunkte, von dem Polardreieck existieren alle drei Ecken und von dem Polar-

*) Jakob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie. II. Teil (Die Theorie der Kegelschnitte, bearbeitet von Heinrich Schroeter) III. Aufl., Leipzig 1898, p. 355.

tetraeder mindestens zwei Ecken. Auch in diesem Falle gibt es daher zwei Kegel, welche die Rc enthalten, so daß der Satz allgemein gilt:

Eine Rc, die mit einem Doppelpunkt behaftet ist, wird von mindestens zwei realen Kegeln ausgeschnitten.

Auf Grund dieses Satzes ist es gestattet, jede mit einem Doppelpunkt behaftete Rc als Schnitt zweier Kegel, O_1 und O_2, aufzufassen, welche wir als die beiden erzeugenden Kegel bezeichnen wollen.

Es kann der Doppelpunkt A der Rc nicht in den Spitzen O_1 und O_2 beider erzeugenden Kegel zugleich liegen. Er liege nicht in O_1. Aus den Strahlen des Kegels O_1 schneidet die Rc Strecken aus, welche von O_1 und der Polarebene dieses Punktes bezüglich beider Kegel harmonisch geteilt werden. Dasselbe geschieht auf dem Kegelstrahl O_1A. Da die geteilte Strecke hier unendlich klein ist, muß die Polarebene von O_1 durch A gehen. Nun liegt A entweder in O_2 oder außerhalb dieser Kegelspitze. Im letzteren Falle ist A in der Polarebene enthalten, welche dem Punkte O_2 in Bezug auf beide Kegel gemeinsam ist. Haben wir es also mit einem Doppelpunkte A zu tun, der nicht in einer der Spitzen der beiden erzeugenden Kegel liegt, so haben wir ermittelt, daß A auf der zu O_1O_2 konjugierten Geraden γ gelegen ist. A kann ferner nicht auf der Geraden O_1O_2 liegen, da sonst alle Punkte dieser Geraden der Rc angehören müßten, wir es also mit einer Raumkurve dritter Ordnung zu tun hätten. Legen wir nun durch A, O_1 und O_2 eine Ebene, so schneidet diese aus den Kegeln zwei Geradenkreuze aus. O_1A ist ein Teil des ersten, O_2A des zweiten Geradenkreuzes. O_1O_2 ist die Polare des Punktes A in Bezug auf beide Geradenkreuze. Jedes dieser Geradenkreuze muß also aus zwei einander unendlich dicht benachbarten Geraden bestehen, die Ebene AO_1O_2 muß beide Kegel im Punkte A berühren. Hat die Rc zwei solche außerhalb der Spitzen der beiden erzeugenden Kegel gelegenen Doppelpunkte, so haben die Kegel zwei gemeinsame Tangentenebenen. Jede Tangentenebene berührt in einem Doppelpunkte beide Kegel zugleich. Da mehr als zwei Berührungsebenen zwei Kegeln nicht gemeinsam sein können, so gibt es auch nicht mehr als zwei solcher Doppelpunkte, die außerhalb der Spitzen der beiden erzeugenden Kegel gelegen sind.

Wenden wir uns nun der Untersuchung eines Doppelpunktes A zu, der in einer der Spitzen der beiden erzeugenden Kegel gelegen ist, z. B. in O_2. Dann liegt A auf der Mantelfläche des andern Kegels O_1. Die Polarebene von O_1 bezüglich beider Kegel geht durch A, die Polarebene von O_2 ist die Tangentenebene des Kegels O_1 mit dem Berührungspunkt A. Auch in diesem Falle geht die zu O_1O_2 konjugierte Gerade durch A, so daß wir den Satz aufstellen können:

Jeder Doppelpunkt der Rc liegt auf der zu $O_1\,O_2$ konjugierten Geraden γ.

Die Doppelpunkte lassen sich in drei Gruppen unterscheiden: in Kreuzungspunkte, Spitzen und isolierte Punkte. Wenn die mit einem Doppelpunkt behaftete Rc der Schnitt zweier Kegel ist, deren beide Scheitel, O_1 und O_2, von dem Doppelpunkte getrennt liegen, so handelt es sich entweder um einen Kreuzungs- oder um einen isolierten Punkt. Liegt der Doppelpunkt dagegen in einer der beiden Kegelspitzen, so kann er jeder der drei Gruppen angehören. Wenn nämlich der Doppelpunkt A mit O_2 zusammenfällt, so kann die Ebene, welche den Kegel O_1 im Punkte A berührt, entweder den Kegel O_2 in einem Geradenkreuz schneiden; dann ist A ein Kreuzungspunkt. Oder sie berührt den Kegel O_2 längs einer Geraden; dann ist A eine Spitze. Oder drittens, sie schneidet den Kegel O_2 weder, noch berührt sie ihn, sondern enthält nur seinen Scheitel; dann ist A ein isolierter Punkt.

Wenn die Rc außerhalb der Spitzen der beiden erzeugenden Kegel zwei Doppelpunkte besitzt, so sind beides Kreuzungspunkte. Beide liegen auf der zu O_1O_2 konjugierten Geraden γ. Legen wir durch γ und einen außerhalb dieser Geraden gelegenen Punkt der Rc eine Ebene, so enthält diese Ebene in jedem Doppelpunkte zwei unendlich dicht benachbarte Punkte der Rc; im ganzen enthält sie daher fünf Punkte der Rc. Das ist nur möglich, wenn die Rc einen ebenen Teil besitzt. Sie ist in zwei ebene Kegelschnitte ausgeartet, deren Ebenen sich in der Geraden γ schneiden, während die beiden Kegelschnitte einander in den beiden Doppelpunkten kreuzen.*)

*) Die doppelte Berührung der beiden Flächen, welche sich in zwei Kegelschnitten durchdringen, erwähnt zuerst

Die Gerade γ schneidet in jedem Doppelpunkte beide erzeugenden Kegel zugleich. Es gibt daher auf γ unendlich viele Paare von Punkten, welche einander bezüglich beider Kegel konjugiert sind. Jeder von diesen Punkten ist der Scheitelpunkt eines weiteren Kegels, welcher die Rc projiziert. Die Rc ist auf unendlich vielen weiteren Kegeln enthalten, deren Spitzen sämtlich auf γ liegen, und welche sämtlich in dieselben beiden sich kreuzenden Ebenen degenerieren.

Das Gefundene können wir in die Sätze zusammenfassen:

Eine Rc kann im allgemeinen nicht mehr als einen Doppelpunkt besitzen. Besitzt sie zwei, so besteht sie aus zwei sich kreuzenden ebenen Kegelschnitten.

Hat die Rc einen Doppelpunkt A, der außerhalb der Spitzen der beiden erzeugenden Kegel gelegen ist, so trifft die zu O_1O_2 konjugierte Gerade γ beide erzeugenden Kegel im Punkte A. Zum zweiten Male trifft sie den Kegel O_1 in B_1, den zweiten Kegel in einem anderen Punkte B_2. Der Punkt A ist in Bezug auf beide Kegel sich selbst konjugiert. Die beiden zusammenfallenden Punkte A sind Spitzen weiterer Kegel, welche die Rc enthalten. Die Rc ist mithin auf einem dritten Kegel enthalten, dessen Spitze in A liegt. Allgemein besteht der Satz:

Ein Doppelpunkt einer Rc bildet stets die Spitze eines realen Kegels, welcher die Rc enthält.

Haben wir es mit einem Doppelpunkt A zu tun, der in einer der Spitzen der beiden erzeugenden Kegel gelegen ist, z. B. in O_2, so schneidet die Gerade γ die beiden erzeugenden Kegel in vier Punkten, die sämtlich bei A unendlich dicht nebeneinander liegen. Es gibt ein Paar Punkte auf γ, welche einander für beide Kegel konjugiert sind, und deren einer unendlich dicht bei A liegt. Die beiden Punkte bilden die Spitzen zweier neuen Kegel, welche die Rc projizieren. Es gibt also außerhalb O_2 auf γ einen Punkt K,

---

Chasles in Correspondance Polytechnique, tome 3, Bruxelles 1843, p. 335. Vergl. auch

Salmon, l. c. I. Teil p. 238,

Clebsch, l. c. p. 224,

Lüroth, l. c. p. 411,

Killing, l. c. p. 23.

der die Spitze eines weiteren durch die Rc gelegten Kegels bildet. Die Kegel K und O_1 haben eine gemeinsame Tangentenebene, welche beide Kegel in A berührt.*) Alsdann kann es sich in A nur um einen Kreuzungs- oder einen isolierten Punkt handeln. Wenn A also zu der dritten Gruppe von Doppelpunkten gehört, eine Spitze der Rc ist, dann fällt K mit A zusammen; in diesem Falle giebt es keinen weiteren Kegel, der die Rc projiziert.**)

Von einer allgemeinen Rc wissen wir, daß sie von vier Kegeln ausgeschnitten wird, die sämtlich oder zum Teil auch imaginär sein können.

Für jede mit einem Doppelpunkt behaftete Rc jedoch können wir nunmehr sagen, daß erstens die auftretenden Kegel sämtlich real sind, und ferner, daß zwei der vier Kegel zusammenfallen, wenn es sich um einen Kreuzungs- oder isolierten Punkt handelt;***) und daß sogar drei derselben in einander fallen, wenn die Rc eine Spitze besitzt.

Wir gehen noch auf die Konstruktion der Spitze des dritten Kegels ein, der eine mit einem Doppelpunkt behaftete Rc enthält, und zwar brauchen wir uns nur mit dem Fall zu beschäftigen, in welchem eine außerhalb des Doppelpunktes gelegene Kegelspitze gesucht wird. O_1 sei die Spitze des einen erzeugenden Kegels, O_2 die des andern und bilde zugleich den Doppelpunkt. Die im vorhergehenden angegebene Konstruktion (cf. p. 4) der zu O_1O_2 konjugierten Geraden versagt in diesem Falle. Wir ermitteln die Polarebene des Punktes O_1 in Bezug auf den Kegel O_2. Diese Ebene wird von derjenigen, die den Kegel O_1 längs der Geraden O_1O_2 berührt, in der Geraden γ geschnitten. Jede durch γ gelegte Ebene schneidet, wofern sie überhaupt der Rc außerhalb des Doppelpunktes begegnet, aus der Rc zwei außerhalb der Geraden gelegene Punkte aus, deren Verbindungsgerade auf γ die Spitze des dritten Kegels projiziert.

Eine Rc, die mit einem Kreuzungs- oder isolierten Punkt A behaftet ist, läßt sich stets als Durchdringung zweier Kegel, O_1 und O_2, auffassen, die bei A beide von derselben Ebene berührt werden.

*) Vergl. hierzu Reye, l. c. III. Abt. p. 36.

**) Clebsch, l. c. p. 219, Lüroth, l. c. p. 410, Killing, l. c. p. 36.

***) Clebsch, l. c. p. 216, Lüroth, l. c. p. 410, Killing, l. c. p. 29.

Das Polartetraeder, welches dem die Rc ausschneidenden Büschel von Flächen zweiter Ordnung gemeinsam ist, besitzt die Ecken O_1, O_2 und A. Die zu O_1O_2 konjugierte Gerade γ geht durch A, begegnet aber der Geraden O_1O_2 nicht. Täte sie das letztere, so wäre der Schnittpunkt X beider Geraden für beide Kegel, O_1 und O_2, sich selbst konjugiert. X würde auf beiden Kegeln liegen, ein Punkt der Rc sein; die Kegel O_1 und O_2 würden die Gerade O_1O_2 gemeinsam haben. Also liegen γ und O_1O_2 windschief zu einander. Auf dieser Geraden γ liegt die vierte Ecke des ausgearteten Polartetraeders, unendlich dicht bei A.

Wenn eine Rc mit einem Kreuzungs- oder isolierten Punkt behaftet ist, so besitzt das ihr zugehörige Polartetraeder vier reale Ecken. Zwei dieser Ecken fallen beim Doppelpunkt unendlich dicht nebeneinander; jedoch bleibt ihre Verbindungsgerade erhalten.

Wie im allgemeinen, so liegen auch hier die vier Ecken des Polartetraeders nicht sämtlich in einer Ebene.

Wenn die Rc eine Spitze besitzt, so fallen bei dieser Spitze drei Tetraederecken unendlich dicht neben einander. Aus der auf p. 8 angegebenen Entstehungsweise der mit einer Spitze behafteten Rc geht hervor, daß die Verbindungsebene dieser drei Ecken des Polartetraeders erhalten bleibt, daß aber trotzdem diese Ecken auf einer Geraden liegen. Wir müssen also annehmen, daß diese drei Punkte ein Dreieck bilden, dessen Seiten von der ersten Ordnung, dessen Höhen jedoch nur von der zweiten Ordnung unendlich klein sind. Der mit einer Spitze behafteten Rc kommt also ein Polartetraeder zu, von welchem — endlich unterschieden — zwei Ecken, zwei Kanten und zwei Seitenflächen existieren. Bezeichnen wir die Spitze der Rc mit A, so ist die Kurve als Durchdringung zweier Kegel aufzufassen, deren Scheitel in A und einem anderen Punkte O liegen. A und O sind die beiden Ecken des Polartetraeders; die Seitenflächen desselben sind erstens die Ebene, welche den Kegel O im Punkte A berührt, zweitens die Polarebene des Punktes O für den Kegel A. Die beiden Kanten des Polartetraeders sind erstens die Gerade AO, zweitens die Gerade, welche die Kurve in der Spitze berührt. Auf dieser letzteren Geraden liegen unendlich dicht neben einander bei A im ganzen drei Kegelspitzen.

III.

Bestimmung und Konstruktion einer Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies, wenn zwei Kurvenpunkte und die Spitzen der vier Kegel gegeben sind, welche die Raumkurve ausschneiden.

Ein gemeinsames Polardreieck kommt nicht nur einem ebenen Büschel von Kegelschnitten zu, sondern unendlich vielen. Bestimmt ist ein Büschel von Kegelschnitten, wenn das gemeinsame Polardreieck und einer der vier Träger des Büschels gegeben sind. In analoger Weise gehören zu einem gemeinsamen Polartetraeder unzählige Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies. Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, ob eine Rc bestimmt ist, wenn die Spitzen O_1, O_2, O_3 und O_4 der vier die Rc ausschneidenden Kegel gegeben sind und ein Punkt der Rc, den wir mit der Ziffer 1 bezeichnen wollen. Die weiteren Punkte der Rc, welche wir ermitteln werden, sollen mit den Ziffern 2, 3, 4 usw. benannt werden. Legen wir durch O_2O_3 und den Punkt 1 eine Ebene, so konstruieren wir nach dem früher angegebenen Verfahren (cf. p. 5) von der Rc die Punkte 2, 3 und 4, welche in dieser Ebene enthalten sind. Die Punktgruppen O_234, O_323, O_314 und O_212 liegen dann in je einer Geraden. In der Ebene $1O_1O_2$, die von O_3O_4 im Punkte G getroffen wird, projizieren die Geraden 2G und $1O_1$ den Punkt 5, und $5O_2$ schneidet $2O_1$ im Punkte 6. In der Ebene $1O_1O_3$ treffen sich O_14 und O_35 im Punkte 7, und in der Ebene $1O_1O_4$, die von O_2O_3 im Punkte H getroffen wird, schneiden sich $1O_4$ und H5 im Punkte 8. Mehr als diese acht Kurvenpunkte lassen sich nicht ermitteln. Weitere Punkte, welche sich nach diesem Verfahren zu ergeben scheinen, fallen mit den schon gefundenen zusammen; denn alle Ebenen, welche wir durch je zwei der gegebenen vier Kegelspitzen und je einen der acht Kurvenpunkte legen können, enthalten jetzt schon vier Kurvenpunkte, die zu der Zahl der Punkte 1, 2, 3, . . . 8 gehören. Diese acht Punkte sind nicht voneinander unabhängig; es sind vielmehr die acht Punkte, welche drei Flächen zweiter Ordnung gemeinsam sind, nämlich den drei Ebenenkreuzen

$O_1O_2 1 — O_1O_2 4$, $O_2O_3 1 — O_2O_3 5$ und $O_1O_3 1 — O_1O_3 2$. Eine Rc ist nun zwar im allgemeinen durch acht ihrer Punkte bestimmt, jedoch ist sie es nicht in dem besonderen Falle, in welchem diese acht Punkte die Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung sind.*)

Eine Rc ist mithin erst dann bestimmt, wenn außer den Spitzen der vier die Rc projizierenden Kegel noch zwei Kurvenpunkte in von einander unabhängiger Lage gegeben sind.

Unabhängig von einander soll die Lage der beiden Kurvenpunkte dann heißen, wenn der zweite gegebene Punkt der Rc nicht mit einem aus der Gruppe der acht Punkte zusammenfällt, welche durch den ersten gegebenen Kurvenpunkt und die vier Kegelspitzen bestimmt sind.

Aus zwei Kurvenpunkten, deren Lage von einander unabhängig ist, und aus den vier Kegelspitzen ergeben sich sechzehn Kurvenpunkte, von denen acht passend gewählte schon genügen, um nach einem bekannten Verfahren, das von Heinrich Schroeter in seinem Buch „Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies“ p. 5 bis p. 12 dargestellt worden ist, unendlich viele weitere Punkte der Kurve zu konstruieren.

Auf Grund der folgenden Betrachtungen bietet sich jedoch ein einfacherer Weg dar, um eine Rc zu konstruieren, von welcher zwei Kurvenpunkte und die Spitzen der vier Kegel gegeben sind, auf denen die Rc gelegen ist.

Bezeichnen wir die beiden gegebenen Kurvenpunkte mit A_1 und A_2, die vier Kegelspitzen mit O_1, O_2, O_3 und O_4, so fragen wir uns, wie man die beiden übrigen Kurvenpunkte, A_3 und A_4, konstruiert, welche in einer beliebigen durch $A_1 A_2$ gelegten Ebene E enthalten sind. Die Geraden O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 schneiden die Ebene E in den Punkten 1, 2 und 3. Die Geraden O_1O_4, O_2O_4 und O_3O_4 treffen dieselbe Ebene in den Punkten I, II und III. In Bezug auf den durch die Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 bestimmten Kegelschnittbüschel sind 1 und I, 2 und II sowie 3 und III paarweise einander konjugiert. Diese drei Punktpaare sind bei der vorliegenden Aufgabe gegeben, ebenso wie die beiden Grundpunkte A_1 und

*) Hesse, l. c. p. 124, Reye, l. c. III. Abt. p. 21 bis p. 23.

A_2; gesucht werden die Grundpunkte A_3 und A_4. Von den drei in Geradenkreuze ausartenden Kegelschnitten des Büschels ist die Gerade A_1A_2 vorhanden, welche wir mit α_1 bezeichnen wollen. Die Gerade 1I trifft α_1 im Punkte P_1 (cf. Fig. III). Dann ist der Punkt Q_1 bestimmt, weil die Strecke 1I durch P_1 und Q_1 harmonisch geteilt wird. Die Gerade 2II trifft α_1 im Punkte P_2, und Q_2 ist bestimmt, weil 2II durch P_2 und Q_2 harmonisch geteilt wird. Die Gerade Q_1Q_2, welche wir mit α_2 bezeichnen wollen, bildet mit α_1 zusammen ein Geradenkreuz des Kegelschnittbüschels. Ein zweites Geradenkreuz dieses Büschels, dessen Scheitelpunkt X heißen möge, hat nun die Eigenschaft, daß sowohl der Strahlenbüschel X ($A_1A_2$1I) wie der Strahlenbüschel X ($A_1A_2$2II) harmonisch ist. Teilen wir die Strecke A_1A_2 innen und außen im selben beliebigen Verhältnis, und verbinden wir die beiden Teilpunkte mit 1 beziehungsweise I, so treffen sich die beiden Verbindungsgeraden im Punkte S_1. Auf dem durch die fünf Punkte, S_1, 1, I, A_1 und A_2, bestimmten Kegelschnitt liegt der Punkt X. . Verbinden wir die beiden Teilpunkte der Strecke A_1A_2 mit 2 beziehungsweise II, so schneiden sich die beiden Verbindungsgeraden im Punkte S_2. Der durch die fünf Punkte, S_2, 2, II, A_1 und A_2, gelegte Kegelschnitt ist ein zweiter geometrischer Ort des Punktes X. Die beiden durch A_1 und A_2 gehenden Kegelschnitte haben außer A_1 und A_2 noch zwei weitere Punkte gemeinsam, welche die gesuchten Scheitel X_1 und X_2 sind. Die Konstruktion derselben gestaltet sich nach einem bekannten Verfahren*) in folgender Weise: Nennen wir den ersten Kegelschnitt K_1 und den zweiten K_2, so ermitteln wir unter Benutzung des Satzes vom Paskalschen Sechseck**) zunächst den Punkt S'_1, in welchem K_1 von der Geraden S_1S_2 zum zweiten Male getroffen wird,***) und ferner den Punkt S'_2, in welchem die Gerade S_1S_2 dem andern Kegelschnitt K_2 zum andern Male begegnet. S_1 und S'_1 sowie S_2 und S'_2 sind dann zwei Punktpaare der quadratischen Involution, welche durch die Gerade S_1S_2 aus dem Kegelschnittbüschel geschnitten wird, dessen Grundpunkte A_1, A_2, X_1 und X_2 sind. Wie wir die Gerade A_1A_2 mit α_1 bezeichnet haben, so wollen

*) Steiner, l. c. p. 235.

**) Reye, l. c. I. Abt. p. 77.

***) Reye, l. c. I. Abt. p. 206.

wir die unbekannte Gerade X_1X_2 mit α bezeichnen. Auf der Geraden S_1S_2 projiziert das Geradenkreuz $\alpha_1\alpha$ ein Punktpaar, das gleichfalls der Involution angehört, und von dem ein Punkt sich als Schnitt von α_1 und S_1S_2 ergibt. Der andere Punkt des Paares ist nun zu ermitteln*) und stellt einen Punkt der gesuchten Geraden α dar. Ziehen wir dann die Gerade 12, so ermitteln wir auch für diese Gerade die beiden Punktpaare, welche aus den Kegelschnitten K_1 und K_2 ausgeschnitten werden. Wiederum wird der Punkt aufgesucht, welcher mit dem Schnitt von α_1 und 12 zusammen ein Punktepaar der auf 12 gelegenen Involution bildet. Der gefundene Punkt ist dann ein zweiter Punkt der Geraden α. Nunmehr kennen wir von α zwei Punkte, so daß wir die Punkte ermitteln können, welche dieser Geraden α und dem Kegelschnitt K_1 gemeinsam sind.**) Diese Punkte sind die gesuchten Scheitel X_1 und X_2.

Verbinden wir nun einen derselben, z. B. X_1, mit A_1 und A_2, so schneidet das entstehende Geradenkreuz die Gerade α_2 (cf. Fig. III) in den Punkten A_3 und A_4, den beiden übrigen Punkten der Rc, die in der Ebene enthalten sind.

Nachdem wir so zwei neue Punkte der Rc erhalten haben, legen wir durch die beiden gegebenen Punkte, A_1 und A_2, eine andere Ebene und ermitteln nach demselben Verfahren die beiden weiteren Kurvenpunkte, welche in dieser Ebene gelegen sind. Durch Wiederholung der Konstruktion für alle Ebenen, welche sich durch A_1A_2 legen lassen, erhalten wir schließlich alle Punkte der Rc.

Es bedarf noch der Untersuchung, ob eine Rc auch dann durch die vier Kegelspitzen, O_1, O_2, O_3 und O_4, und zwei ihrer Kurvenpunkte, A_1 und A_2, bestimmt ist, wenn sie einen Kreuzungs- oder isolierten Punkt besitzt. Nehmen wir z. B. an, dieser Doppelpunkt sei in O_1 gelegen, und O_4 falle unendlich dicht neben O_1; jedoch sei die Gerade O_1O_4 bekannt, ihrer Richtung nach gegeben. Wir bezeichnen den Punkt A_1 mit der Ziffer 1. Das eingangs dieses Kapitels angewandte Verfahren liefert nicht mehr weitere sieben Punkte, die mit 1 zusammen eine Gruppe bilden, sondern es fallen einige dieser acht Punkte zusammen. Die Punkte 1, 2, 3

*) Reye, l. c. I. Abt. p. 155.

**) Reye, l. c. I. Abt. p. 206.

und 4 bleiben von einander endlich getrennt, dagegen fallen die Punkte 5, 6, 7 und 8 unendlich dicht neben O_1. Statt einer Gruppe von acht Punkten gibt es also eine solche von nur fünf Punkten. Jedoch führt auch A_2 zu einer solchen Gruppe von fünf Kurvenpunkten, so daß wir im ganzen mit dem Doppelpunkt neun Punkte der Rc kennen. Die Kurve ist mithin bestimmt.

Auch das fernerhin angegebene Verfahren zur Konstruktion von unendlich vielen weiteren Punkten der Rc behält seine Anwendbarkeit, wenn wir darauf achten, daß die Verbindungsgerade der beiden unendlich dicht beisammenliegenden Kegelspitzen zur Mitwirkung gelangt. Dasselbe würde nicht geschehen, wenn bei der auf p. 13 bis p. 15 beschriebenen Konstruktionsmethode O_3 und O_4 diejenigen Kegelspitzen wären, welche unendlich dicht beisammen liegen. Alsdann würden die Punkte 1 und II zusammenfallen und ebenso an einer andern Stelle der Ebene E die Punkte 2 und I. Weiterhin würden die Punkte Q_1 und Q_2 (cf. Fig. III) zur Deckung gelangen, so daß die Gerade α_2 unbestimmt würde. Diese Unbestimmtheit wird vermieden, wenn wir in der erwähnten Konstruktionsvorschrift z. B. O_1 und O_4 als die beim Doppelpunkte gelegenen Kegelspitzen betrachten. Dann liegen im allgemeinen sämtliche Punkte, welche bei der Konstruktion auftreten, von einander getrennt, sodaß die Bestimmtheit der sich ergebenden Stücke erhalten bleibt.

Zum Schluß beschäftigen wir uns noch mit dem Fall, in welchem die Kurve eine Spitze besitzt. In diesem Falle kann man das Polartetraeder als gegeben ansehen, wenn der außerhalb der Spitze gelegene Scheitel des Kegels O, die Spitze A, die durch A gehende zu OA konjugierte Gerade γ und die durch γ gehende Polarebene Ω von O bekannt sind. Sind dazu noch zwei Kurvenpunkte, 1 und 2, gegeben, so muß der Kegel mit dem Scheitel A diese beiden Punkte 1 und 2 enthalten. Die Geraden O1 und O2 treffen die Ebene Ω in den Punkten S_1 beziehungsweise S_2. Dann sind auf diesen Geraden die Punkte 1′ und 2′ dadurch bestimmt, daß sie mit 1 und 2 zusammen die Strecken OS_1 beziehungsweise OS_2 harmonisch teilen. Die Punkte 1′ und 2′ müssen gleichfalls auf dem Kegel A liegen. Da außerdem die Ebene $O\gamma$ den Kegel A längs der Geraden γ berührt, so wäre dieser Kegel vollständig bestimmt. Nicht so jedoch der Kegel O, da von ihm nur die Tangentenebene $O\gamma$, welche

längs der Geraden OA berührt, und die beiden Strahlen $O11'$ und $O22'$ gegeben wären. Erst ein dritter Kurvenpunkt 3, der aber nicht in unabhängiger Lage sich befinden darf, sondern auf dem Kegel A liegen muß, bestimmt auch den Kegel O vollständig, so daß wir sagen können:

Eine Rc, die mit einer Spitze behaftet ist, wird durch das ausgeartete Polartetraeder und drei außerhalb der Spitze gelegene Kurvenpunkte bestimmt, von denen jedoch nur zwei willkürlich zu wählen sind, während der dritte auf einer bestimmten Kegelfläche gelegen sein muß.

IV.

Wenn von einer Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies drei Punkte gegeben sind und die Spitzen von drei die Kurve enthaltenden Kegeln, so ist der geometrische Ort für die Spitze des vierten die Kurve projizierenden Kegels eine Raumkurve dritter Ordnung.

Wir kommen nun zu der Frage, wieviel Kurvenpunkte zur Bestimmung der Rc nötig sind, wenn die Spitzen O_1, O_2 und O_3 von drei Kegeln gegeben sind, welche die Rc enthalten.

Nehmen wir an, es seien von der Rc drei Punkte, A_1, A_2 und A_3, gegeben. Die Ebene, welche diese drei Punkte enthält, nennen wir E. Dieselbe wird von der Geraden O_2O_3 im Punkte 1, von O_3O_1 im Punkte 2 und von O_1O_2 im Punkte 3 getroffen. Die Punkte 1, 2 und 3 liegen auf einer Geraden. Die unbekannte Spitze des vierten Kegels, der die Rc projiziert, wollen wir mit O_4 bezeichnen. Es begegnet die Gerade O_1O_4 der Ebene E im Punkte I, O_2O_4 begegnet der Ebene E im Punkte II und O_3O_4 im Punkte III. Die Punkte 1 und I, 2 und II sowie 3 und III sind paarweise einander konjugiert für die drei Geradenkreuze, welche A_1, A_2, A_3 und den unbekannten vierten in E gelegenen Punkt A_4 der Rc enthalten. Nach dem bekannten Satze vom Polvierseit*) liegen die

*) Sind zwei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits für einen Kegelschnitt konjugiert, so ist es auch das dritte Paar. Zuerst bei Otto Hesse, „De

Punkte 1II III, 2III I und 3I II auf je einer Geraden. Von jedem der drei Geradenkreuze ist eine Gerade gegeben, A_1A_2, A_2A_3 und A_3A_1. Die unbekannte Gerade, welche mit A_2A_3 ein Geradenkreuz bildet, heiße α. Diejenige, welche mit A_3A_1 ein Geradenkreuz bildet, sei β genannt (cf. Fig. IV). Benutzen wir für die folgende Rechnung Dreieckskoordinaten des Punktes*) unter Zugrundelegung des Koordinatendreiecks $A_1A_2A_3$, so habe der Punkt 1 die Koordinaten x_{11}, x_{21} und x_{31}, während x_{12}, x_{22} und x_{32} die Koordinaten des Punktes 2 und x_{13}, x_{23} und x_{33} diejenigen des Punktes 3 vorstellen mögen. Da die Punkte 1, 2 und 3 auf einer Geraden enthalten sind, so besteht die Gleichung

$$1) \quad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Den Geraden α und β entsprechen die Gleichungen $\alpha \equiv x_2 + ax_3 = 0$ und $\beta \equiv x_1 + bx_3 = 0$. Wenn wir unter K_a das Geradenkreuz verstehen, welches aus A_2A_3 und α gebildet wird, und unter K_b dasjenige, welches sich aus A_3A_1 und β zusammensetzt, so lauten ihre Gleichungen

$$K_a \quad x_1x_2 + ax_1x_3 = 0 \quad \text{und} \quad K_b \quad x_1x_2 + bx_2x_3 = 0.$$

Die Polare des Punktes 1 bezüglich des Geradenkreuzes K_a sei P_{1a}, diejenige des Punktes 1 bezüglich K_b sei P_{1b} · P_{2a} sei die Polare von 2 in Bezug auf K_a, P_{2b} diejenige von 2 für K_b. Als Gleichungen dieser vier Polaren ergeben sich

$$\begin{aligned} P_{1a} &\equiv \xi_1 (x_{21} + ax_{31}) + \xi_2 x_{11} + \xi_3 ax_{11} = 0, \\ P_{1b} &\equiv \xi_1 x_{21} + \xi_2 (x_{11} + bx_{31}) + \xi_3 bx_{21} = 0, \\ P_{2a} &\equiv \xi_1 (x_{22} + ax_{32}) + \xi_2 x_{12} + \xi_3 ax_{12} = 0 \text{ und} \\ P_{2b} &\equiv \xi_1 x_{22} + \xi_2 (x_{12} + bx_{32}) + \xi_3 bx_{22} = 0. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt von P_{1a} und P_{1b} ist der Punkt I, seine Koordinaten seien ξ_{11}, ξ_{21} und ξ_{31}. P_{2a} und P_{2b} schneiden sich im Punkte II,

curvis et superficiebus secundi ordinis“ im Journal für die reine und angew. Mathem. B. 20. 1840. p. 301; cf. auch Steiner, l. c. p. 143.

*) O. Staude „Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene“ Leipzig und Berlin 1905 p. 123 bis p. 142.

dessen Koordinaten ξ_{12}, ξ_{22} und ξ_{32} sein mögen. Es bestehen somit die Gleichungen

$$2)\ \xi_{11}(x_{21} + a x_{31}) + \xi_{21} x_{11} + \xi_{31} a x_{11} = 0,$$
$$3)\ \xi_{11} x_{21} + \xi_{21}(x_{11} + b x_{31}) + \xi_{31} b x_{21} = 0,$$
$$4)\ \xi_{12}(x_{22} + a x_{32}) + \xi_{22} x_{12} + \xi_{32} a x_{12} = 0 \text{ und}$$
$$5)\ \xi_{12} x_{22} + \xi_{22}(x_{12} + b x_{32}) + \xi_{32} b x_{22} = 0.$$

Da die Punkte I, II und 3 in einer Geraden liegen, so ist schließlich

$$6)\ \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \xi_{31} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \xi_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus den sechs numerierten Gleichungen könnnen wir die fünf Größen a, b, ξ_{12}, ξ_{22} und ξ_{32} eliminieren und erhalten die Gleichung für den geometrischen Ort des Punktes I. Aus 2) und 3) ergibt sich

$$\frac{1}{a} = -\frac{\xi_{11} x_{31} + x_{11} \xi_{31}}{\xi_{11} x_{21} + x_{11} \xi_{21}} \text{ und } \frac{1}{b} = -\frac{\xi_{21} x_{31} + x_{21} \xi_{31}}{\xi_{11} x_{21} + x_{11} \xi_{21}}.$$

Aus 4) und 5) folgt

$$\frac{\xi_{12}}{\xi_{32}} = \frac{x_{12}}{x_{32}} \cdot \frac{-\frac{1}{b} x_{12} + \frac{1}{a} x_{22} - x_{32}}{\frac{1}{b} x_{12} + \frac{1}{a} x_{22} + x_{32}} \text{ und } \frac{\xi_{22}}{\xi_{32}} = \frac{x_{22}}{x_{32}} \cdot \frac{\frac{1}{b} x_{12} - \frac{1}{a} x_{22} - x_{32}}{\frac{1}{b} x_{12} + \frac{1}{a} x_{22} + x_{32}}.$$

$$\text{Es ist } \frac{1}{a} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_3} \text{ und } \frac{1}{b} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3},$$

wenn γ_1, γ_2 und γ_3 lineare Funktionen von ξ_{11}, ξ_{21} und ξ_{31} bedeuten. Dann ist

$$\frac{\xi_{12}}{\xi_{32}} = \frac{x_{12}}{x_{32}} \cdot \frac{\gamma_2 x_{12} - \gamma_1 x_{22} - \gamma_3 x_{32}}{-\gamma_2 x_{12} - \gamma_1 x_{22} + \gamma_3 x_{32}} \text{ und}$$

$$\frac{\xi_{22}}{\xi_{32}} = \frac{x_{22}}{x_{32}} \cdot \frac{-\gamma_2 x_{12} + \gamma_1 x_{22} - \gamma_3 x_{32}}{-\gamma_2 x_{12} - \gamma_1 x_{22} + \gamma_3 x_{32}}.$$

Bezeichnen wir die beiden Zähler der rechten Seiten dieser Gleichungen bezüglich mit F_1 und F_2, die gemeinsamen Nenner mit F_3, so ist ersichtlich, daß F_1, F_2 und F_3 linear in Bezug auf ξ_{11}, ξ_{21} und ξ_{31} sind. Wenn λ eine bestimmte Größe vorstellt, so ist

$$\xi_{12} = \lambda \cdot F_1,\ \xi_{22} = \lambda \cdot F_2 \text{ und } \xi_{32} = \lambda \cdot F_3.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung 6) ein, so ergibt sich bei Unterdrückung des Faktors λ

$$C_1 \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \xi_{31} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Dies ist die Gleichung für den Ort des Punktes I. Da sie in Bezug auf die Variabeln ξ_{11}, ξ_{21} und ξ_{31} vom zweiten Grade ist, so schließen wir, daß der Punkt I auf einem Kegelschnitt gelegen ist, den wir mit C_1 bezeichnen.

Die Determinante C_1 verschwindet, wenn die obere Horizontalreihe mit der unteren identisch wird. Also liegt der Punkt 3 auf dem Kegelschnitt C_1.

Wir fragen uns weiter, ob der Punkt 2 auf der Kurve C_1 enthalten ist. Setzen wir $\xi_{11} = x_{12}$, $\xi_{21} = x_{22}$ und $\xi_{31} = x_{32}$, so gehen die auf p. 19 dargestellten Gleichungen über in

$$\frac{1}{a} = -\frac{x_{12}x_{31} + x_{11}x_{32}}{x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22}}, \qquad \frac{1}{b} = -\frac{x_{22}x_{31} + x_{21}x_{32}}{x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22}},$$

$$\frac{\xi_{12}}{\xi_{32}} = \frac{x_{12}}{x_{32}} \cdot \frac{-2x_{11}x_{22}x_{32}}{-2x_{12}x_{22}x_{31}} = \frac{x_{11}}{x_{31}} \quad \text{und} \quad \frac{\xi_{22}}{\xi_{32}} = \frac{x_{22}}{x_{32}} \cdot \frac{-2x_{12}x_{21}x_{32}}{-2x_{12}x_{22}x_{31}} = \frac{x_{21}}{x_{31}} .$$

Für die Werte $\xi_{12} = \lambda x_{11}$, $\xi_{22} = \lambda x_{21}$ und $\xi_{32} = \lambda x_{31}$, wenn wir zugleich für ξ_{11}, ξ_{21} und ξ_{31} die Größen x_{12}, x_{22} und x_{32} setzen, nimmt die linke Seite der Gleichung 6) die Form an

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = W.$$

Da die Determinante infolge der Gleichung 1) verschwindet, ist $W = 0$. Mithin liegt auch der Punkt 2 auf dem Kegelschnitt C_1.

Nachdem wir als geometrischen Ort des Punktes I den Kegelschnitt C_1 ermittelt haben, welcher die Punkte 2 und 3 enthält, schließen wir, daß der Punkt II auf einem Kegelschnitt C_2 gelegen ist, welcher durch die Punkte 1 und 3 geht, und daß endlich der Punkt III auf einem dritten Kegelschnitt C_3 enthalten ist, welcher die Punkte 1 und 2 ausschneidet.

Sind zwei dieser Kegelschnitte, z. B. C_1 und C_2, bekannt, so ist C_3 auf einfache Art zu konstruieren. Nehmen wir auf C_1 irgend

einen Punkt I an (cf. Fig. V), so wird C_2 von der Geraden 3 I im Punkte II geschnitten. Die Geraden 2 I und 1 II treffen sich im Punkte III. Wiederholen wir die Konstruktion für alle Punkte von C_1, so ergibt sich C_3 als Ort der Punkte III.

Hieraus ist ersichtlich, daß alle Schnittpunkte von zweien der drei Kegelschnitte C_1, C_2 und C_3, wofern sie außerhalb der Geraden 1 2 3 gelegen sind, auch Punkte des dritten Kegelschnitts sind. Die drei Kegelschnitte haben daher entweder einen oder drei gemeinsame Punkte.

Die gesuchte Kegelspitze O_4 ist nun auf dem Kegel enthalten, welcher von O_1 aus den Kegelschnitt C_1 projiziert, zweitens auf demjenigen Kegel, dessen Spitze O_2 und dessen Querschnitt C_2 ist, und drittens auf dem Kegel mit der Spitze O_3 und dem Querschnitt C_3. Die Punkte, welche diesen drei Kegeln gemeinsam sind, sind solche, in denen O_4 gelegen sein kann. Wir bezeichnen diese Kegel mit K_1, K_2 und K_3. Es ist ersichtlich, daß K_1 die Geraden $O_1 2$ und $O_1 3$ enthält, K_2 die Geraden $O_2 1$ und $O_2 3$ und K_3 die Geraden $O_3 1$ und $O_3 2$. Auf $O_1 2$ liegt aber der Punkt O_3, auf $O_1 3$ der Punkt O_2, auf $O_2 1$ der Punkt O_3, auf $O_2 3$ der Punkt O_1, auf $O_3 1$ der Punkt O_2 und auf $O_3 2$ der Punkt O_1. Die drei Kegel haben also die Punkte O_1, O^2 und O_3 gemeinsam. K_1 enthält das Geradenkreuz $O_1O_2 - O_1O_3$; K_2 das Geradenkreuz $O_2O_3 - O_2O_1$ und K_3 das Geradenkreuz $O_3O_1 - O_3O_2$. Sind nun II und III irgend zwei zusammengehörige Punkte der Kurven C_2 und C_3 in der Ebene E, geht also ihre Verbindungsgerade durch den Punkt 1, so ziehen wir die Geraden O_2II und O_3III (cf. Fig. VI. [Die Ebene Ω, welche die Punkte O_1, O_2 und O_3 enthält, hat gegen die Ebene E eine bestimmte Neigung. Beide Ebenen haben die Gerade 1 2 3 gemeinsam.]). Die beiden Geraden treffen sich im Punkte P, welcher der Schnittkurve der beiden Kegel K_2 und K_3 angehört. Die Ebene $PO_3 2$ schneidet die Ebene E in der Geraden 2 III, die Ebene $PO_2 3$ trifft die Ebene E in der Geraden 3II. Die Ebenen $PO_3 2$ und $PO_2 3$ haben die Punkte O_1 und I gemeinsam; folglich muß die Gerade O_1I durch den Punkt P gehen; in anderen Worten: der Punkt P gehört auch dem Kegel K_1 an. Es ergibt sich hieraus die Tatsache, daß die Schnittkurve von zweien der drei Kegel — mit Ausnahme der Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$, aber mit Einschluß der Ecken — vollständig auf dem

dritten Kegel enthalten ist. Die krumme Linie, in welcher sich zwei Kegel durchdringen, die eine Gerade gemeinsam haben, ist eine Raumkurve dritter Ordnung.*) Eine solche ist den drei Kegeln K_1, K_2 und K_3 gemeinsam; der Ort des Punktes O_4 ist daher eine Raumkurve dritter Ordnung, welche die Punkte O_1, O_2 und O_3 enthält.

Das Ergebnis dieser Untersuchung ist nunmehr folgendes: Durch drei Kurvenpunkte und die Spitzen von drei die Kurve projizierenden Kegeln ist eine Rc nicht bestimmt. Es ergibt sich aus diesen Bedingungen vielmehr ein Bündel von unendlich vielen Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies, welches dadurch entsteht, daß die Spitze des vierten die Kurve projizierenden Kegels sich auf einer bestimmten Raumkurve dritter Ordnung bewegt, auf der auch die drei gegebenen Kegelspitzen gelegen sind.

Wählen wir für O_4 einen Punkt der Raumkurve dritter Ordnung, welcher unendlich dicht neben einer der drei gegebenen Kegelspitzen liegt, so erhalten wir durch das im vorigen Kapitel angegebene Konstruktionsverfahren eine Rc, welche bei O_4 einen Kreuzungs- oder isolierten Punkt besitzt. Dieselbe ist vollständig bestimmt, da auch die Verbindungsgerade der beiden unendlich dicht neben einander liegenden Kegelspitzen, nämlich die Tangente der Raumkurve dritter Ordnung in dem betreffenden Punkte, bekannt ist. Unter dem oben gekennzeichneten Bündel von Raumkurven befinden sich also drei, welche mit einem Doppelpunkt behaftet sind.

*) Über solche Raumkurven vgl.

Salmon, l. c. II. Teil p. 117 bis p. 128 (analytisch),

H. Schroeter „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde". Leipzig 1880 p. 227 bis p. 340 (synthetisch),

Clebsch, l. c. p. 237 bis p. 252 (analytisch),

Reye, „Die Geometrie der Lage" II. Abt. 4. Aufl. Stuttgart 1907. p. 163 bis p. 200 (synthetisch).

V.

Geometrische Konstruktion der im vorigen Kapitel auftretenden Raumkurve dritter Ordnung.

Wenn die Lage der sechs gegebenen Punkte O_1, O_2, O_3, A_1, A_2 und A_3, von denen die drei ersten die Spitzen dreier die Rc enthaltenden Kegel seien, die übrigen aber Punkte der Rc, mit der Existenz einer Rc vereinbar ist, dann trifft diese Rc die Ebene E, welche durch die Punkte A_1, A_2 und A_3 gelegt ist, außer in diesen drei Punkten noch in dem unbekannten Punkte A_4. Von den Geraden O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 wird die Ebene E in den Punkten 1, 2 und 3 getroffen. Ziehen wir (cf. Fig. VII) die Gerade $1A_1$, so schneidet dieselbe die Seite A_2A_3 im Punkte L. Es gibt auf ihr einen Punkt P_1, welcher dadurch bestimmt ist, daß er mit 1 zusammen die Strecke A_1L harmonisch teilt.

Wenn die Gerade $2A_1$ die Seite A_2A_3 in M trifft, so ist auf ihr ein Punkt P_2 bestimmt, weil er mit 2 zusammen die Strecke A_1M harmonisch teilt. Die Gerade $3A_1$, welche der Seite A_2A_3 in N begegnet, enthält den Punkt P_3, welcher mit 3 zusammen die Strecke A_1N harmonisch teilt. Wenn wir den Schnittpunkt der Geraden A_2A_3 und 1 2 3 mit S bezeichnen, und wenn wir denjenigen Strahl SX konstruieren, welcher mit dem Strahl S 1 2 3 zusammen den Winkel der Geraden SA_1 und SA_2A_3 harmonisch teilt, so enthält dieser Strahl SX die Punkte P_1, P_2 und P_3. Die letzteren drei Punkte liegen demnach in einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Geraden 1 2 3 und A_2A_3 geht.

Wenn wir unter K_1 das Geradenkreuz verstehen, welches aus den Geraden A_2A_3 und A_4A_1 gebildet wird, so wollen wir mit Π_1, Π_2 und Π_3 diejenigen Geraden bezeichnen, welche die Polaren der Punkte 1, 2 und 3 bezüglich des Geradenkreuzes K_1 sind. Wo nun auch A_4 liegen möge, welches also auch die Lage des Punktes K_1 auf der Geraden A_2A_3 sein möge, stets enthalten die durch K_1 gehenden Strahlen Π_1, Π_2 und Π_3 die Punkte P_1, P_2 und P_3.

Es sei O_4 die unbekannte Spitze des vierten die Rc projizierenden Kegels, und die Geraden O_1O_4, O_2O_4 und O_3O_4 mögen die Ebene

E in den Punkten I, II und III treffen. Dann liegt I auf Π_1, II auf Π_2 und III auf Π_3. Die drei Polaren Π_1, Π_2 und Π_3 haben nun die Eigenschaft, daß es auf ihnen unendlich viele Konfigurationen I II III gibt, deren jede so liegt, daß die Gerade I II den Punkt 3 enthält, II III den Punkt 1 und III I den Punkt 2. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden 1 2 3 und K_1P_3 mit α und den Schnittpunkt der Geraden $P_1P_2P_3$ und K_13 mit β. (cf. Fig. VIII). Ziehen wir die Gerade $3A_1P_3$, welche die Strahlen Π_1 und Π_2 in den Punkten I und II schneidet, so wollen wir zunächst beweisen, daß für diesen Fall die Geraden 2 I und 1 II sich auf dem Strahl Π_3 treffen. Betrachten wir das Viereck $\alpha\ 3\beta\ P_3$, so mögen sich die Seiten $\alpha\beta$ und $3P_3$ im Punkte X schneiden. K_1X wird durch die Strahlen $P_3\beta$ und $\alpha 3$ harmonisch geteilt. X muß daher auf der Geraden A_1S liegen, wenn mit S der Schnittpunkt der Geraden $P_1P_2P_3$ und 1 2 3 bezeichnet wird. X ist also mit A_1 identisch. Da nun die Gerade $\alpha\beta$ durch A_1 geht, besteht die Projektivität $(P_3P_1P_2\beta)\ \Pi\ (3\ 1\ 2\alpha)$ und deshalb auch $(P_3\ I\ II\ 3)\ \Pi\ (3\ 1\ 2\alpha)$. Der Wert eines Doppelverhältnisses ändert sich nicht, wenn die Punkte in entgegengesetzter Reihenfolge angeordnet werden.*) Somit ist $(P_3\ I\ II\ 3)\ \Pi\ (\alpha 2\ 1\ 3)$. Da diese beiden Punktquadrupel sich in perspektivischer Lage befinden, so müssen sich die Strahlen I 2, II 1 und $P_3\alpha$ in einem Punkte treffen.

Nachdem wir erkannt haben, daß für eine bestimmte Konfiguration I II III auf dem Strahlentripel $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ die in der Behauptung bezeichnete eigentümliche Lage besteht, bedarf es noch des Nachweises, daß dies für alle solche auf dem Strahlentripel gelegenen Konfigurationen gilt. Haben wir (cf. Fig. IX) ein Dreieck I II III, dessen Seiten die in einer Geraden gelegenen Punkte 3, 1 und 2 projizieren, und ziehen wir von einem beliebigen Punkte K_1 aus die Strahlen Π_1, Π_2 und Π_3 durch die Ecken I, II und III, so schneidet jeder durch 1 gelegte Strahl auf Π_2 und Π_3 Punkte II′ und III′ aus, die so liegen, daß die Geraden 3 II′ und 2 III′ sich in einem Punkte I′ begegnen, der auf Π_1 enthalten ist. Denn der Strahlenbüschel mit dem Scheitel 1 trifft die Geraden Π_2 und Π_3 in zwei projektiven Punktreihen. Der Strahlenbüschel, welcher die erste Punktreihe von 3 aus, und der

*) Reye, l. c. I. Abt. p. 152.

Strahlenbüschel, der die zweite Punktreihe von 2 aus projiziert, sind perspektiv, weil zwei sich entsprechende Strahlen zusammenfallen, nämlich in der Geraden 1 2 3. Beide Strahlenbüschel projizieren also eine Gerade, welche den Punkt I und den Punkt K_1 enthält, und dies ist die Gerade Π_1.

Wenn wir jetzt die Strahlen $A_2 1$, $A_2 2$ und $A_2 3$ (cf. Fig. VII) ziehen, so treffen dieselben die Gerade $A_1 A_3$ in den Punkten L', M' und N'. Auf dem ersten Strahl ist der Punkt Q_1 dadurch bestimmt, daß er mit 1 zusammen die Strecke $A_2 L'$ harmonisch teilt; auf dem zweiten Strahle liegt der Punkt Q_2, welcher mit 2 zusammen $A_2 M'$ harmonisch teilt, und auf dem dritten Strahle liegt das Punktepaar Q_3 und 3 harmonisch zu A_2 und N'. Die drei Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 liegen auf einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Geraden 1 2 3 und $A_1 A_3$ geht. Konstruieren wir den Strahl $A_3 X$, welcher mit dem Strahl $A_3 1$ zusammen den Winkel der Geraden $A_3 A_1$ und $A_3 A_2$ harmonisch teilt, so enthält der Strahl $A_3 X$ die Punkte P_1 und Q_1. Ebenso wie P_1 und Q_1 mit A_3 auf einer Geraden liegen, gehen auch die Geraden $P_2 Q_2$ und $P_3 Q_3$ durch A_3.

Bezeichnen wir das Kreuz der Geraden $A_1 A_3$ und $A_1 A_2$ mit K_2, so wird der Punkt K_2 (cf. Fig. VII) sich auf der Geraden $A_1 A_3$ bewegen, wenn der Punkt K_1 die Gerade $A_2 A_3$ beschreibt. In Bezug auf jedes Geradenkreuz K_2 jedoch gehen die Polaren der Punkte 1, 2 und 3 durch die Punkte Q_1, Q_2 und Q_3. Betrachten wir K_1 als einen festliegenden Punkt, so ergibt sich nunmehr die Aufgabe, denjenigen Punkt K_2 der Geraden $A_1 A_3$ zu ermitteln, welcher die Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 so auf Π_1, Π_2 und Π_3 projiziert, daß die Seiten des ausgeschnittenen Dreiecks I II III die Punkte 3, 1 und 2 enthalten. (cf. Fig. X). Legen wir durch den Punkt 1 als Scheitel einen Strahlenbüschel, so schneidet derselbe auf Π_2 und Π_3 zwei projektive Punktreihen aus. Die Punkte der ersten Reihe verbinden wir geradlinig mit Q_2, die der zweiten mit Q_3. Die beiden Strahlenbüschel mit den Scheiteln Q_2 und Q_3 sind projektiv, die einander entsprechenden Strahlen treffen sich in den Punkten eines Kegelschnitts, welcher die Punkte K_1, Q_2 und Q_3 enthält. Dieser Kegelschnitt hat mit der Geraden $A_1 A_3$ zwei Punkte gemeinsam, deren jeder die Bedingung erfüllt, welche an den Punkt K_2 gestellt ist. Für jeden dieser beiden Punkte schneidet die Gerade $K_2 Q_2$ auf Π_2 einen Punkt II aus, trifft

K_2Q_3 den Strahl Π_3 im zugehörigen Punkte III und K_2Q_1 den Strahl Π_1 im zugehörigen Punkte I.

Das Punktetripel I II III besitzt die von ihm geforderte Eigenschaft, daß die Gerade II III den Punkt 1, III I den Punkt 2 und I II den Punkt 3 projiziert. Während diese Tatsache für die erste der drei Geraden selbstverständlich ist, haben wir bei den Geraden III I und I II zu bedenken, daß in Bezug auf die beiden Geradenkreuze K_1 und K_2 (cf. Fig. VII) der Punkt II dem Punkte 2 und III dem Punkte 3 konjugiert ist, und daß die Gerade II III den Punkt 1 enthält. Die Geraden 3 II und 2 III begegnen sich daher in einem Punkte, welcher dem Punkte 1 für beide Geradenkreuze konjugiert ist, und das ist der Punkt I, weil er auf K_2Q_1 und K_1P_1 gelegen ist.

Die beiden Konfigurationen I II III, welche den beiden Punkten K_2 entsprechen, liefern nun zwei Punkte für jeden der Kegelschnitte C_1, C_2 und C_3. Wenn wir einen neuen Punkt auf A_2A_3 als Scheitel K_1 eines neuen Geradenkreuzes wählen, so ergeben sich auf dieselbe Weise wie vorher zwei neue Punkte K_2, welche wiederum zu zwei neuen Punkten I der Kurve C_1 führen und zugleich zwei weitere Punkte II von C_2 und zwei weitere Punkte III von C_3 liefern. Von jedem der drei Kegelschnitte C_1, C_2 und C_3 sind dann sechs Punkte bekannt, von C_1 die Punkte 2, 3 und vier Punkte I, von C_2 die Punkte 1, 3 und vier Punkte II und von C_3 die Punkte 1, 2 und vier Punkte III. Jeder der drei Kegelschnitte ist daher vollständig bestimmt und konstruierbar.

Hiernach gestaltet sich die Konstruktion der Kegelschnitte C_1, C_2 und C_3, welche im vorigen Kapitel aufgetreten sind, in folgender Weise: Nachdem wir in der Ebene E die Punkte 1, 2 und 3 zu den gegebenen Punkten A_1, A_2 und A_3 ermittelt haben, ziehen wir die Gerade $1A_1$ und bestimmen auf ihr den Punkt P_1. Durch den Schnittpunkt der Geraden 1 2 3 und A_2A_3 legen wir von P_1 aus eine Gerade, welche von den Strahlen $2A_1$ und $3A_1$ in den Punkten P_2 und P_3 getroffen wird. Der Strahl A_3P_1 wird von der Geraden $1A_2$ im Punkte Q_1 geschnitten, während A_3P_2 und A_3P_3 von den Strahlen $2A_2$ und $3A_2$ in Q_2 beziehungsweise Q_3 geschnitten werden. Einen beliebigen Punkt K_1 der Geraden A_2A_3 verbinden wir geradlinig mit P_2 und P_3. Durch 1 legen wir zwei Strahlen, welche auf

Π_2 die Punkte a_2 und b_2 und auf Π_3 die entsprechenden Punkte a_3 und b_3 ausschneiden. Die Strahlen Q_2a_2 und Q_3a_3 schneiden sich in x, die Strahlen Q_2b_2 und Q_3b_3 in y. Die fünf Punkte x, y, K_1, Q_2 und Q_3 bestimmen einen Kegelschnitt, und es kommt darauf an, die Punkte zu ermitteln, welche dieser Kegelschnitt mit der Geraden A_1A_3 gemeinsam hat. Diese nach einem bekannten Verfahren*) ermittelten Punkte sind die beiden Punkte K_2. Für jeden dieser Punkte schneiden die drei Strahlen K_2Q_1, K_2Q_2 und K_2Q_3 die entsprechenden Strahlen Π_1, Π_2 und Π_3 in den Punkten I, II und III. Durch Wiederholung dieses Verfahrens für einen neuen Punkt K_1 gewinnen wir zwei weitere Punktetripel I II III, sodaß wir dann von den Kegelschnitten C_1, C_2 und C_3 die erforderliche Zahl der Punkte besitzen.

Durch Projizierung dieser drei Kegelschnitte von den Punkten O_1, O_2 und O_3 aus erhalten wir die drei Kegel, welche sich in der gesuchten Raumkurve dritter Ordnung durchdringen.

VI.

Einige Eigenschaften der mit einem Doppelpunkte behafteten symmetrisch gestalteten Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies.

Wir wollen die Frage untersuchen, unter welcher Bedingung eine mit einem Doppelpunkte behaftete Rc auf einer Kugel enthalten ist. O_1 und O_2 seien diejenigen beiden Spitzen von die Rc enthaltenden Kegeln, welche nicht mit dem Doppelpunkt A zuzammenfallen. Wir wählen die beiden Kegeln gemeinsame Tangentenebene AO_1O_2 zur x z-Ebene und den Doppelpunkt A zum Nullpunkt des Koordinatensystems. Eine Fläche zweiter Ordnung, welche den Nullpunkt enthält, hat bei Benutzung von Kartesianischen Koordinaten eine Gleichung von der Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z = 0.$$

*) Reye, l. c. I. Abt. p. 206.

Die Ebene, welche diese Fläche im Nullpunkt berührt, hat die Gleichung

$$a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \zeta \quad O.$$

Wenn diese Ebene mit der xz-Ebene zusammenfällt, so ist $a_1 = a_3 = O$. Eine Fläche, welche die xz-Ebene im Nullpunkt berührt, hat daher die Gleichung

$F \equiv a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + a_{22} y^2 + 2a_{23} yz + a_{33} z^2 + 2a_2 y = O.$

Wenn diese Fläche in einen Kegel übergeht, muß die Determinante verschwinden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & O \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & O \\ O & a_2 & O & O \end{vmatrix},$$

oder es muß sein

$$a_2^2 \ (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) = O.$$

Die Koordinaten der Spitze des Kegels ergeben sich aus den Gleichungen

$$\xi \quad \frac{a_{13} a_2}{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}} \text{ und } \zeta = \frac{a_{11} a_2}{a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}}.$$

Da die Spitze des Kegels nicht mit dem Nullpunkt zusammenfällt, muß a_2 von Null verschieden sein. Die Gleichung eines Kegels, welcher die xz-Ebene im Nullpunkte berührt, ist daher $F = O$ mit der Bedingung

$$a_{11} a_{33} - a_{13}^2 = O.$$

Die Kegel O_1 und O_2 haben mithin folgende Gleichungen

1) $O_1 \equiv a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + a_{22} y^2 + 2a_{23} yz + a_{33} z^2 + 2a_2 y = O$

und

2) $O_2 \equiv b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + 2b_{13} xz + b_{22} y^2 + 2b_{23} yz + b_{33} z^2 + 2b_2 y = O$

mit den Bedingungen

$$3) \ a_{11} a_{33} = a_{13}^2 \text{ und } 4) \ b_{11} b_{33} = b_{13}^2.$$

Ist die Rc auf einer Kugel K enthalten, so besteht die Identität

$$5) \ K \equiv \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2,$$

wenn λ_1 und λ_2 zwei bestimmte Zahlen vorstellen, von denen keine

Null oder unendlich groß ist. Die Gleichung einer Kugel, welche die Ebene der X- und Z-Axe im Nullpunkt berührt, ist

$$6)\quad K = x^2 + y^2 + z^2 - 2ry = 0.$$

Wenn wir 5) mit 6) vergleichen, so ergeben sich folgende Gleichungen

$$7)\ \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} = 1, \qquad 10)\ \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} = 1,$$
$$8)\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} = 0, \qquad 11)\ \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} = 0,$$
$$9)\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} = 0, \qquad 12)\ \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 b_{33} = 1$$
$$\text{und}\quad 13)\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 = -r.$$

Hieraus folgt

$$14)\quad a_{12} : b_{12} = a_{13} : b_{13} = a_{23} : b_{23} \text{ und}$$
$$15)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & 1 \\ a_{22} & b_{22} & 1 \\ a_{33} & b_{33} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen 14) und 15) geben die Bedingungen dafür an, daß die von den beiden Kegeln O_1 und O_2 ausgeschnittene mit einem Doppelpunkt behaftete Rc auf einer Kugel enthalten ist.

Ein Zylinder zweiter Ordnung, welcher die xz-Ebene längs der z-Axe berührt, hat die Gleichung

$$16)\quad C \equiv a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_2 y = 0.$$

Diese Gleichung entsteht aus 1) und 3), wenn

$$17)\quad a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0 \text{ ist.}$$

Damit der Zylinder von dem Kegel O_2 in einer Rc getroffen werde, die auf einer Kugel enthalten ist, müssen neben 17) die Gleichungen 4) und 7) bis 12) bestehen. Es muß also $b_{13} = b_{23} = 0$ sein und entweder $b_{11} = 0$ oder $b_{33} = 0$. Da wir aus 2) im letzteren Falle

$$O_2 \equiv b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2 + 2b_2 y = 0$$

erhalten, so scheidet dieser Fall aus; denn O_2 wäre ebenso wie O_1 ein Zylinder, der die xz-Ebene längs der z-Axe berührt. Es ist deshalb $b_{11} = 0$ und

$$18)\quad O_2 \equiv 2b_{12} xy + b_{22} y^2 + b_{33} z^2 + 2b_2 y = 0.$$

Dieser Kegel ist in Bezug auf die xy-Ebene symmetrisch. Wir gelangen demnach zu dem Satze:

Wenn auf einem Zylinder von einem Kegel, dessen Spitze außerhalb der Zylinderfläche liegt, eine mit einem Doppel-

punkt behaftete Rc projiziert wird, welche auf einer Kugel liegt, so ist die Rc symmetrisch in Bezug auf die durch den Doppelpunkt normal zur Zylinderaxe gelegte Ebene.

Wenn eine bezüglich der Ebene E symmetrische Rc von zwei Flächen zweiter Ordnung, F_1 und F_2, ausgeschnitten wird, so sind auch diese beiden Flächen in Bezug auf die Ebene E symmetrisch. Wenn die symmetrische Rc im Punkte A einen Doppelpunkt besitzt, so ist derselbe in der Symmetrieebene E enthalten. Wir machen ihn zum Nullpunkt des Koordinatensystems, die Symmetrieebene zur xy-Ebene und erhalten für die beiden erzeugenden Flächen die Gleichungen

$$F_1 \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y = 0$$

und

$$F_2 \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y = 0.$$

Der Kegel, dessen Spitze im Doppelpunkt A liegt, und welcher die Rc ausschneidet, hat die Gleichung

$$K = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0,$$

wenn λ_1 und λ_2 zwei bestimmte Zahlen vorstellen, die weder Null noch unendlich groß sind. Da dieser Kegel K den Nullpunkt enthält, zur xy-Ebene symmetrisch gelegen ist, und da schließlich die Ebene, welche ihn im Nullpunkt berührt, unbestimmt wird, so hat er eine Gleichung von der Form

$$K \equiv c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 = 0.$$

Wenn wir dies mit dem obigen Ausdruck für K vergleichen, so ergibt sich, daß die beiden Gleichungen bestehen

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 = 0 \text{ und } \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 = 0,$$

daß also eine symmetrische Rc nur dann einen Doppelpunkt besitzt, wenn die Proportion $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ erfüllt ist.

Wenn keiner der beiden weiteren Kegel, welche die mit einem Doppelpunkt behaftete symmetrische Rc projizieren, in einen Zylinder ausartet, so müssen ihre Spitzen O_1 und O_2 in der Symmetrieebene E gelegen sein. Im Doppelpunkt A werden beide Kegel von derselben Ebene S berührt. Da die Ebenen E und S nicht zusammenfallen, liegen die Punkte A, O_1 und O_2 auf einer Geraden, deren sämtliche Punkte zur Rc gehören. Die letztere scheidet damit aus

unserer Untersuchung aus, weil sie keine eigentliche Rc mehr vorstellt, und wir erhalten den Satz:

Eine symmetrische Rc, welche einen Doppelpunkt besitzt, ist stets auf einem Zylinder zweiter Ordnung enthalten, dessen Axe normal zur Symmetrieebene gerichtet ist. Sie wird von zwei weiteren Kegeln ausgeschnitten, deren Spitzen in der Symmetrieebene liegen.

Während eine gewöhnliche Rc noch weitere Symmetrieebenen besitzen kann, nämlich im ganzen zwei oder drei, die aufeinander senkrecht stehen, oder auch unendlich viele, wenn sie in zwei Kreise ausartet, welche in parallelen, zur Verbindungslinie der beiden Zentren normalen Ebenen gelegen sind, kann eine Rc, welche mit einem Doppelpunkt behaftet ist, nicht mehr als zwei Symmetrieebenen haben. Wenn sie zwei solcher Ebenen besitzt, so wird sie von zwei Zylindern zweiter Ordnung ausgeschnitten, deren Axen einen Winkel von 90° bilden. Haben diese Zylinder nicht nur eine, sondern zwei gemeinsame Tangentenebenen, so besitzt die Rc zwar drei Symmetrieebenen, aber auch zwei Doppelpunkte, stellt also die auf p. 8 erwähnte Ausartung vor.

VII.

Eine gewisse Schar von Rollkurven als Beispiel für die bisherigen Untersuchungen.

Als Beispiel für diese Untersuchungen wollen wir eine Rollkurve betrachten, welche in folgender Weise entsteht: Auf der Peripherie eines festen Kreises rollt ein kongruenter Kreis, dessen Ebene mit der Ebene des festen Kreises stets einen rechten Winkel bildet. Jeder Punkt der beweglichen Ebene beschreibt dann eine Raumkurve, welche wir betrachten wollen.*)

*) Die besondere Kurve, welche ein auf der Peripherie des rollenden Kreises gelegener Punkt beschreibt, hat behandelt

Jos. Schreiner, „Über diejenige Kardioide, bei welcher die Ebenen des rollenden und des festen Kreises zu einander senkrecht bleiben", Kempten 1896, Gymnasialprogrammbeilage.

Nennen wir den Punkt der beweglichen Ebene, dessen Bahn wir untersuchen, P (cf. Fig. XI) und den Mittelpunkt des rollenden Kreises M, so gibt es eine Phase der Bewegung, in welcher M, P und der momentane Berührungspunkt beider Kreise in einer Geraden liegen, und zwar P und der Berührungspunkt auf derselben Seite von M. Diesen momentanen Berührungspunkt wählen wir zum Nullpunkt O eines rechtwinkligen Koordinatensystems, den nach O gezogenen Radius des festen Kreises nehmen wir zur x-Axe, und zwar sei der vom Mittelpunkt weggerichtete Sinn der positive; die Gerade, welche den festen Kreis in O berührt, sei die y-Axe, deren positiver Sinn durch die Richtung angegeben wird, welche der momentane Berührungspunkt von O aus einschlägt, und der positive Sinn der z-Axe gehe nach der Seite, auf welcher der rollende Kreis sich befindet.

Bezeichnen wir den Radius der beiden Kreise mit a, den Abstand PM mit b und mit Θ den Winkel, welchen PM mit der Geraden bildet, die M mit dem jeweiligen momentanen Berührungspunkt verbindet, so ergeben sich die Gleichungen der Rollkurve

$$\begin{aligned} x &= \cos\Theta\ (a - b\cos\Theta) + b - a, \\ y &= \sin\Theta\ (a - b\cos\Theta) \text{ und} \\ z &= a - b\cos\Theta. \end{aligned}$$

Durch eine parallele Verschiebung des Axensystems längs der X-Axe um die Strecke $b - a$ vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\text{R)} \qquad \begin{aligned} \xi &= \cos\Theta\ (a - b\cos\Theta), \\ \eta &= \sin\Theta\ (a - b\cos\Theta) \text{ und} \\ \zeta &= a - b\cos\Theta. \end{aligned}$$

Wenn wir Θ eliminieren, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2 \quad \text{und} \quad b\xi = a\zeta - \zeta^2.$$

Da die erste einen Kegel zweiter Ordnung vorstellt und die zweite einen parabolischen Zylinder, so handelt es sich um eine Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies.

Der Kegel, auf dem die Rollkurve gelegen ist, ist ein Rotationskegel, dessen Scheitel der neue Ursprung Ω des Koordinatensystems ist, und dessen Kanten mit der ζ-Axe Winkel von 45° bilden. Da für jeden Kurvenpunkt der Abstand von der $\xi\eta$-Ebene gleich dem

Abstand von der ζ-Axe ist, so hat die Projektion der Rollkurve auf die $\xi\eta$-Ebene in Bezug auf Ω als Nullpunkt und die ξ-Axe als Nulllinie in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r = a - b \cos \Theta.$$

Diese Projektion ist für den Fall $b = a$ eine Kardioide, für den Fall $b > a$ eine Kurve, die aus einem inneren und einem äußeren Zuge besteht und einen Kreuzungspunkt besitzt, und im Falle $b < a$ schließlich ein Oval, das an einer Seite eingebuchtet ist (cf. Fig. XII). In jedem Fall ist sie eine Epizycloide. Die Kardioide, die gedehnte Epizycloide und der äußere Zug der verschlungenen sind die Projektionen der Raumkurvenzüge, welche sich in demjenigen Teile des Kreiskegels befinden, der auf derselben Seite der festen Ebene liegt wie der rollende Kreis, während der innere Zug der letzteren Kurve von dem andern Teile des Kegels herrührt.

Wenn der Punkt P außerhalb des rollenden Kreises gelegen ist, so hat die Rollkurve in Ω einen Kreuzungspunkt. Derselbe verwandelt sich in eine Spitze, wenn P auf der Peripherie des rollenden Kreises liegt. Da der parabolische Zylinder auch im Falle $b < a$ den die Rollkurve projizierenden Kegel in der Kegelspitze schneidet, so gehört der als Rc aufgefaßten Rollkurve dieser Punkt Ω als isolierter Punkt an, wenn P sich innerhalb des rollenden Kreises befindet.

Zwei von den Kegeln, welche die Rc projizieren, sind uns bekannt, nämlich der parabolische Zylinder und der Rotationskegel, dessen Spitze sich im Doppelpunkt der Kurve befindet. In den Fällen, wo die Rc einen Kreuzungs- oder einen isolierten Punkt besitzt, muß sie noch auf einem dritten Kegel enthalten sein. Wie aus ihrer Entstehung ersichtlich, ist die Rollkurve symmetrisch in Bezug auf die $\xi\zeta$-Ebene, der dritte Kegel muß daher gleichfalls für diese Ebene symmetrisch liegen. Bezeichnen wir ihn mit K, so hat er eine Gleichung von der Form

$$K \equiv \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 + \lambda\,(\zeta^2 + b\xi - a\zeta) = 0 \text{ oder}$$

$$K = \xi^2 + \eta^2 + (\lambda - 1)\,\zeta^2 + \lambda\, b\, \xi - \lambda\, a\, \zeta \quad 0.$$

Da diese Gleichung einen Kegel darstellt, so muß die Determinante verschwinden

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & -\frac{\lambda a}{2} \\ \frac{\lambda b}{2} & 0 & -\frac{\lambda a}{2} & 0 \end{vmatrix},$$

oder es muß die Gleichung bestehen

$$\frac{\lambda^2}{4} \cdot \left[a^2 + b^2(\lambda - 1)\right] = 0.$$

Das Auftreten der Doppelwurzel $\lambda = 0$ zeigt, daß der Rotationskegel, dessen Spitze im Doppelpunkt gelegen ist, zweifach zu zählen ist. Die dritte Wurzel $\lambda = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$ liefert, in die Gleichung für K eingesetzt, die Gleichung eines neuen die Rc enthaltenden Kegels. Der Scheitel desselben liegt in der $\xi\zeta$-Ebene und hat die Koordinaten

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{2b} \text{ und } \zeta = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Für den Fall $b = a$, in welchem der Doppelpunkt der Rc in eine Spitze übergeht, wird auch die dritte Wurzel λ zu Null, fällt also der neue Kegel mit den Kegeln zusammen, deren Spitzen im Doppelpunkt gelegen sind, sodaß nunmehr ein dreifach zu zählender Kegel außer dem parabolischen Zylinder vorhanden ist.

Von dem Polartetraeder, welches allen durch die Rollkurve gelegten Flächen zweiter Ordnung gemeinsam ist, kennen wir bisher drei Ecken, erstens Ω, zweitens den unendlich fernen Punkt der η-Axe und drittens die Spitze des zuletzt ermittelten Kegels, welche wir mit K bezeichnen wollen. Es fehlt noch die Gerade γ, auf welcher die vierte Tetraederecke unendlich dicht neben Ω gelegen ist. Die $\xi\zeta$-Ebene, in der γ enthalten ist, enthält von der Rc außer den bei Ω befindlichen zwei Punkten noch die Punkte C_1 mit den Koordinaten $\xi = a - b$ und $\zeta = a - b$ und C_2 mit den Koordinaten $\xi = -(a + b)$ und $\zeta = a + b$. Alle Punkte der Geraden γ müssen dem Punkte K in Bezug auf das Kreuz der Geraden ΩC_1 und ΩC_2 konjugiert sein. Da dies Geradenkreuz einen rechten

Winkel einschließt, so liegt γ in Bezug auf den Kegelstrahl ΩC_1 symmetrisch mit der Tetraederkante ΩK. Auf dieser Geraden γ liegt die vierte Tetraederecke unendlich dicht neben Ω.

Zwischen den Koordinaten der Kegelspitze K besteht die Proportion $\xi : \zeta = a : b$. Geht der Doppelpunkt der Rollkurve in eine Spitze über, so ist $a = b$ und daher auch $\xi = \zeta$. Da aus diesem Grunde die Gerade ΩK mit der Geraden ΩC_1 zusammenfällt, so gelangen auch ΩC_1 und die Gerade γ zur Deckung. Die Gerade γ ist also derjenige Strahl des Rotationskegels Ω, welcher senkrecht auf ΩC_2 steht. Auf p. 11 ist gesagt worden, daß von dieser Geraden γ die Rc in der Spitze berührt würde. Um zu zeigen, daß dies auch bei unserer Rollkurve der Fall ist, ermitteln wir die Richtungswinkel der Geraden, welche die Schnittlinie der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{und} \quad z^2 + ax - az = 0$$

im Punkte $x = y = z = 0$ berührt. Es bestehen dann auch die Ableitungen $x\,dx + y\,dy - z\,dz = 0$ und $a\,dx - a\,dz + 2z\,dz = 0$.

Hieraus folgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{a - 2z} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{az - ax + 2xz}{ay - 2yz}.$$

Für $x = y = z = 0$ geht die erste der beiden Gleichungen über in $\frac{dz}{dx} = 1$.

Da in der zweiten Gleichung die rechte Seite den Wert $\frac{0}{0}$ annimmt, differenzieren wir Zähler und Nenner noch einmal und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a + 2x)\frac{dz}{dx} - a + 2z}{(a - 2z)\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dz}{dx}}$$

oder nach Einsetzung der betreffenden Werte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{a\frac{dy}{dx}}.$$

Hieraus folgt $\frac{dy}{dx} = 0$. Bezeichnen wir die Winkel, welche die Kurven-

tangente mit den Coordinatenaxen bildet, bezüglich mit τ_x, τ_y und τ_z, so bestehen die Gleichungen

$$\cos\tau_x = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

$$\cos\tau_y = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \text{ und}$$

$$\cos\tau_z = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Für $\frac{dy}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dx}=1$ erhalten wir $\cos\tau_x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos\tau_y = 0$ und $\cos\tau_z = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Damit ist bewiesen, daß γ mit der Geraden identisch ist, welche die Rollkurve in ihrer Spitze berührt.

Für den Fall, daß die Rollkurve in Ω eine Spitze hat, ergibt sich in Übereinstimmung mit den auf p. 11 gemachten Bemerkungen folgende Beschaffenheit des Polartetraeders: Ω und der unendlich ferne Punkt der ηA-xe sind die beiden Ecken, die Tangente γ und die η-Axe die beiden Kanten des Tetraeders, und schließlich sind die durch γ und die η-Achse gelegte Ebene sowie die $\xi\zeta$-Ebene die beiden Seitenflächen desselben.

Zum Schluß wollen wir das auf p. 27 bis p. 29 angegebene Verfahren benutzen, um die Frage zu entscheiden, ob die Rollkurve auf einer Kugel enthalten ist. Die beiden die Rc ausschneidenden Kegel, deren Spitzen außerhalb des Doppelpunktes liegen, haben in unserm Falle die Gleichungen

$$O_1 \quad \zeta^2 + b\xi - a\zeta = 0 \text{ und}$$

$$O_2 \equiv \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 + \frac{b^2-a^2}{b^2}(\zeta^2 + b\xi - a\zeta) = 0.$$

Das zugrundeliegende Koordinatensystem lassen wir eine Drehung von ω^0 um die η-Achse durchmachen, so daß der positive Teil der

neuen x-Axe innerhalb des rechten Winkels gelegen ist, der von den positiven Teilen der ξ- und ζ-Axe gebildet wird. Die neue xy-Ebene soll die beiden Kegel O_1 und O_2 im Doppelpunkte, dem Nullpunkt, berühren, so daß die Gleichung besteht $\tan\omega = \frac{b}{a}$. Außerdem vertauschen wir die Buchstaben y und z gegen einander. Die Transformation wird dann durch Einführung der Werte

$$\begin{aligned} \xi &= vx - uy, \\ \eta &= z \quad \text{und} \\ \zeta &= ux + vy \end{aligned}$$

bewirkt, wenn $u = \sin\omega$ und $v = \cos\omega$ ist. Wir erhalten die Gleichungen

$$O_1 \equiv u^2 x^2 + 2uvxy + v^2 y^2 - y(bu + av) = 0 \text{ und}$$

$$O_2 \equiv 2(a^2uv + b^2uv)xy + (a^2v^2 - b^2u^2)y^2 - b^2z^2 + (b^2 - a^2)(bu + av)y = 0.$$

Da

$$\begin{aligned} a_{12} &= uv, & b_{12} &= (a^2 + b^2)uv, \\ a_{13} &= 0, & b_{13} &= 0, \\ a_{23} &= 0, & b_{23} &= 0, \end{aligned}$$

so ist die auf p. 29 No. 14 aufgestellte Bedingung erfüllt. Da ferner

$$\begin{aligned} a_{11} &= u^2, & b_{11} &= 0, \\ a_{22} &= v^2, & b_{22} &= a^2v^2 - b^2u^2, \\ a_{33} &= 0, & b_{33} &= -b^2, \end{aligned}$$

so besteht auch die auf p. 29 No. 15 aufgestellte Gleichung. Es ist nämlich

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} u^2 & 0 & 1 \\ v^2 & a^2v^2 - b^2u^2 & 1 \\ 0 & -b^2 & 1 \end{vmatrix} = u^2(a^2v^2 - b^2u^2 + b^2) - v^2b^2.$$

Durch Einführung der Werte

$$u = \sin\omega = \frac{b}{r}, \quad v = \cos\omega = \frac{a}{r}, \quad \text{wo } r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

ergibt sich nach einiger Umrechnung

$$\Delta \equiv \frac{b^2}{r^4}(a^4 - b^4 + b^4 - a^4) = 0.$$

Die Rollkurve liegt also auf einer Kugel, sie ist eine cyklische Kurve.

Die Gleichung dieser Kugel läßt sich in den beiden Formen schreiben

$$S = (\xi - p)^2 + \eta^2 + (\zeta - q)^2 - \rho^2 = 0 \text{ und}$$
$$S = \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 + \mu (b\xi - a\zeta + \zeta^2) = 0.$$

Da diese Gleichungen identisch sind, ergibt sich

$$\mu - 1 = 1,\ \mu b = -2p,\ \mu a = 2q \text{ und } -\rho^2 + q^2 + p^2 = 0,$$

woraus für die Coordinaten des Kugelzentrums wie für den Halbmesser die Werte folgen

$$p = -b,\ q = a \text{ und } \rho^2 = a^2 + b^2.$$

Das Zentrum der Kugel fällt mit demjenigen des Kreises zusammen, welchen der Mittelpunkt des rollenden Kreises beschreibt, ist also unabhängig von der Lage des die Rollkurve durchlaufenden Punktes P in der Ebene des rollenden Kreises. Alle Rollkurven, welche durch Veränderung der Kreisradien und der Lage des Punktes P entstehen, ergeben sich demnach auch als Schar der Schnittkurven eines Rotationskegels, dessen Seiten mit der Axe Winkel von 45° bilden, und aller derjenigen Kugeln, welche die Spitze dieses Kegels enthalten.

Lebenslauf.

Am 18. November 1873 wurde ich in Berlin als Sohn eines Tischlermeisters geboren. Meine Schulbildung erhielt ich zuerst auf dem Königstädtischen, dann auf dem Andreas-Realgymnasium meiner Vaterstadt, meine kirchliche Erziehung in der evangelischen Konfession. Mit dem Zeugnis der Reife 1893 von der Schule entlassen, studierte ich zehn Semester an der Berliner Universität und Technischen Hochschule Mathematik und Physik, um dann zwei Jahre hindurch als Lehrer an Privatschulen — zuerst im Harz, dann in Jena — tätig zu sein. Nachdem ich in Berlin das examen pro facultate docendi abgelegt und an verschiedenen Berliner Anstalten die vorgeschriebene zweijährige Vorbereitung auf das Schulamt absolviert hatte, wurde ich 1902 in meiner Vaterstadt als Oberlehrer angestellt und bin seither an verschiedenen Realschulen tätig gewesen.

Carl Nadler.